

# 不同板叠材料热声热机能量转换过程数值模拟研究

姚辰<sup>1</sup>, 高搏<sup>1</sup>, 孙渤<sup>1</sup>, 刘继平<sup>1</sup>, 严俊杰<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 710049, 西安;

2. 西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

**摘要:** 为揭示不同板叠材料对热声热机性能影响,基于开源 C++ 计算库 MFEM,构建了利用间断伽辽金算法的高精度热声热机数值模拟模型,研究了 4 种不同板叠材料对热声热机能量转换过程及效率的影响。在欧拉和拉格朗日两种观点下分别分析了能量分布与粒子振荡特性。结果表明:铁板叠产生的压力振幅最高,铜板叠最低;温度梯度分布随材料性质显著不同,其中铁板叠分布均匀,铜板叠趋于水平直线,而玻璃与聚酰亚胺板叠的温度梯度集中在靠近热端换热器一侧。在欧拉观点下,局部能量密度分布与温度梯度规律一致;在拉格朗日观点下,粒子的温度-位置及温度-比熵曲线揭示了不同位置粒子在一个周期内的做功分布规律。进一步计算发现,玻璃板叠的循环做功最大,铜板叠最小;铜板叠的换热量最高,铁板叠最低;铁板叠的效率最高(为 10.11%),铜板叠最低(为 3.87%)。研究表明板叠材料的物理性质所形成的温度梯度分布差异对热声热机的能量转换效率具有重要影响。

**关键词:** 热声热机;板叠;能量转换;间断伽辽金算法

**中图分类号:** TM911.4 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.7652/xjtuxb202607016 **文章编号:** 0253-987X(2026)07-0173-12

## Numerical Simulation of the Energy Conversion Process in Thermoacoustic Engines with Different Stack Materials

YAO Chen<sup>1</sup>, GAO Bo<sup>1</sup>, SUN Bo<sup>1</sup>, LIU Jiping<sup>1</sup>, YAN Junjie<sup>2</sup>

(1. MOE Key Laboratory of Thermal Fluid Science Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** To elucidate how different stack materials influence the performance of thermoacoustic engines, a high-accuracy numerical simulation model for thermoacoustic engines utilizing the discontinuous Galerkin method was developed based on the open-source C++ library MFEM. The impacts of four different stack materials on the energy conversion process and efficiency of thermoacoustic engines were investigated. Energy distribution and particle oscillation characteristics were analyzed from both Eulerian and Lagrangian perspectives. The results demonstrate that the highest pressure amplitude was generated by the iron stack, while the lowest was produced by the copper stack. The temperature gradient distribution was found to be significantly dependent on material properties: a uniform distribution was observed in the iron stack, a nearly horizontal profile in the copper stack, and a concentration near the hot-end heat exchanger in the glass and

收稿日期: 2025-11-03。 作者简介: 姚辰(2000—),男,博士生;刘继平(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目:

国家重点研发计划资助项目(2024YFE0212800)。

网络出版时间: 2026-03-20

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.t.20260320.1350.002>

Kapton stacks. In the Eulerian framework, the local energy density distribution was found to be consistent with the temperature gradient patterns. In the Lagrangian framework, the distribution patterns of particles at different positions working over one cycle were elucidated through temperature-position and temperature-specific entropy curves of particles. Further calculations showed that the glass stack yielded the maximum cycle work while the copper stack yielded the minimum; the copper stack exhibited the highest heat transfer, whereas the iron stack showed the lowest; and the iron stack attained the highest efficiency (10.11%), while the copper stack presented the lowest (3.87%). These findings indicate that the variations in temperature gradient distribution, governed by the physical properties of the stack materials, are a key factor determining the energy conversion efficiency of thermoacoustic engines.

**Keywords:** thermoacoustic engine; stack; energy conversion; discontinuous Galerkin method

热声热机是一种基于热声效应,将热能转化为声能的能量转换装置,主要由声学谐振腔、板叠、热端换热器及冷端换热器组成。当热源对谐振腔内的工作气体加热时,气体温度上升并引起压力变化,从而在腔体中产生声波。这些声波在谐振腔内不断反射和叠加,最终形成稳定的声场。与传统热机不同,热声热机无需旋转机械部件,具有结构紧凑、运行平稳、噪声低和维护成本低等优点。此外,该类装置能够利用太阳能等可再生能源作为热源<sup>[1-3]</sup>,将低品位热能转化为高品位机械能,从而提高能源利用率、降低能耗并减少环境污染。凭借其显著的节能与环保特性,热声设备在能源回收与可持续发展领域具有广阔的应用前景<sup>[4-5]</sup>。

为研究各种热声装置中的热声现象,Rott<sup>[6]</sup>最早提出了线性热声理论,通过线性化控制方程来描述热声过程。随后,Swift<sup>[7-8]</sup>对该理论进行了完善与扩展,使其适用于低压力振幅下热声装置的声学特性及动态过程的研究。Boroujerdi等<sup>[9]</sup>基于线性理论及波动方程的解析解,探讨了不同工作气体及双组分气体混合物条件下驻波型热声热机性能的影响因素。Chen等<sup>[10]</sup>结合线性理论与实验研究,分析了一维驻波型热声发动机在不同边界条件下的起振温度、起振频率及声场分布特性。然而,当压力振幅较高时,系统中会出现非线性效应,如高次谐波与声流现象,此时线性理论已不再适用<sup>[11]</sup>。为研究热声装置中的非线性效应,国内外学者采用了多种数值模拟方法。Hamilton等<sup>[12]</sup>和Karpov等<sup>[13]</sup>分别提出了两种非线性模型,用于模拟热声装置中的部分非线性现象。Han等<sup>[14]</sup>使用通量修正传输(FCT)算法,模拟了腔体内热声波的产生与传播过程,以及热声热机的非线性特征。Nowak等<sup>[15]</sup>利用Ansys CFX软件提出并比较了简化分析模型与

数值模型,用于模拟热声发动机的运行过程。Slimene等<sup>[16]</sup>采用格子玻尔兹曼方法(LBM),研究了驻波型热声发动机中的对流换热与瑞利声流,其中板叠区域简化为多孔介质模型。Ja'fari等<sup>[17]</sup>利用OpenFOAM开源软件研究了热声发动机中的声流特性,并通过分布式流体泵类比解释了谐振腔内平均压力的轴向非均匀分布。王海涛等<sup>[18]</sup>通过对比Sage一维模型与CFD二维模型,揭示了热声发动机交变流动换热器的换热与阻力特性差异,并提出了基于有效压降和速度的局部阻力修正方法。刘贤贤等<sup>[19]</sup>通过建立热声热机核心部件的三维、二维及一维等效模型,对比分析了不同模型的换热与阻力特性,表明二维Fluent模型能够在保证计算精度的同时有效替代三维模型。

在此基础上,许多学者进一步探讨了不同结构和运行参数对热声装置性能的影响。Besnoin和Knio<sup>[20]</sup>采用非定常数值模拟方法,研究了驱动比、板叠厚度、换热器长度及其位置对热声制冷机性能和流动特性的影响表明,在特定的换热器参数与驱动比组合下,制冷负荷可达到最大值。Hariharan等<sup>[21]</sup>利用DeltaEC软件结合实验,对双热声驱动器的性能进行了优化研究,分析了谐振腔长度、工作介质及充气压力变化对起振温差、共振频率和压力振幅的影响规律。Rahpeima和Ebrahimi<sup>[22]</sup>探讨了驻波型热声制冷机中板叠几何与热物性参数对制冷性能的影响,表明板叠间距和长度均存在最优范围。Bouramdane等<sup>[23]</sup>研究板叠形状对由热声热机驱动的热声制冷机效率的影响表明,不规则表面结构有助于提升热声热机压力振幅,而平板结构在热声制冷机中有利于产生更大的温差。Bouramdane等<sup>[24]</sup>进一步对驻波型热声热机在热驱动制冷系统中的效率进行了预测与优化。

尽管目前已提出多种用于研究热声装置非线性现象的数值模型,并围绕不同参数对热声装置性能的影响开展了大量研究,但现有模型普遍存在一定程度的简化,且多数工作未能深入揭示结构参数变化对能量转换过程的内在机制。针对上述问题,本文采用间断伽辽金(DG)算法,建立了高精度的  $1/4$  波长驻波型热声热机数值模型。该模拟代码基于开源 C++ 模块化有限元库 MFEM 开发,具有高度的灵活性、可扩展性和高性能计算效率<sup>[25]</sup>。模型充分考虑了两端换热器及板叠对周围流体的流动与换热影响。基于该模型对比研究了不同板叠材料对热声热机能量转换过程及效率的影响,并分别从欧拉和拉格朗日视角分析了不同板叠材料对热声性能影响的内在机理。研究结果表明,板叠材料的物性差异导致的温度梯度分布变化对热声热机的能量转换效率具有显著影响,为热声热机中板叠材料的优化选

择提供了理论指导。

## 1 数值计算模型

### 1.1 几何模型

图 1(a)展示了  $1/4$  波长驻波型热声热机模型的几何结构示意图。本文所研究的热声热机采用 Swift<sup>[7]</sup> 提出的演示模型,主要由谐振腔、热端换热器、冷端换热器以及核心部件板叠组成。板叠由等间距平板堆叠组成,位于冷端与热端换热器之间,是热声系统中实现能量传递与储存的关键,两端换热器的结构被简化成与板叠相同厚度的平板。此外,本文采用了文献[26]提出的方法,通过在靠近开口端位置处添加一个额外的板叠作为虚拟黏性源,以在模型中人为引入一个在数量级上等效于实际物理谐振腔黏性损失的局部黏性耗散。热声热机主要的几何参数如表 1 所示。

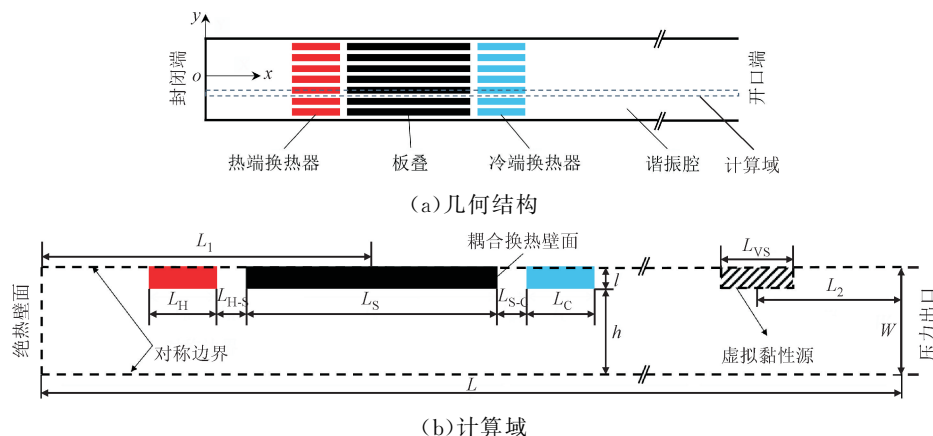


图 1  $1/4$  波长驻波热声热机结构以及计算域示意图

Fig. 1 Structural and computational domain schematic of a quarter-wavelength standing-wave thermoacoustic engine

表 1 热声热机几何参数

Table 1 Geometric parameters of the thermoacoustic engine

| 几何参数                          | 数值   |
|-------------------------------|------|
| 波长 $\lambda/\text{mm}$        | 640  |
| 谐振腔长度 $L/\text{mm}$           | 160  |
| 热端换热器长度 $L_H/\text{mm}$       | 3    |
| 板叠长度 $L_S/\text{mm}$          | 15   |
| 冷端换热器长度 $L_C/\text{mm}$       | 3    |
| 虚拟黏性源长度 $L_{VS}/\text{mm}$    | 5    |
| 板叠中心至封闭端长度 $L_1/\text{mm}$    | 35   |
| 虚拟黏性源至开口端长度 $L_2/\text{mm}$   | 35   |
| 热端换热器与板叠间距 $L_{HS}/\text{mm}$ | 0.4  |
| 冷端换热器与板叠间距 $L_{SC}/\text{mm}$ | 0.4  |
| 板叠半厚度 $l/\text{mm}$           | 0.05 |
| 板叠半间距 $h/\text{mm}$           | 0.2  |
| 计算域厚度 $W/\text{mm}$           | 0.25 |

### 1.2 初始及边界条件

初始时刻,热声热机中的工作介质处于静止状态,在各个方向上的速度分量为 0。本文选用空气为工作介质,初始压力为 100 kPa,初始温度为 300 K。热端换热器温度设置为 600 K,冷端换热器温度设置为 300 K,板叠的初始温度为 300 K。模拟中所用到的初始参数如表 2 所示。

表 2 热声热机初始参数

Table 2 Operational parameters of the thermoacoustic engine

| 初始参数                    | 数值  |
|-------------------------|-----|
| 空气初始温度 $T_m/\text{K}$   | 300 |
| 空气初始压强 $p_m/\text{kPa}$ | 100 |
| 热端换热器温度 $T_H/\text{K}$  | 600 |
| 冷端换热器温度 $T_C/\text{K}$  | 300 |
| 板叠初始温度 $T_S/\text{K}$   | 300 |

为探究不同板叠材料对热声热机性能的影响,本文参考文献[22]选取了4种不同的固体材料进行模拟研究,分别为铁,铜,玻璃以及聚酰亚胺(Kapton)。材料的物性参数如表3所示。

表3 不同板叠材料物性参数

Table 3 Properties of different stack material

| 材料     | 密度/<br>( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) | 导热系数/<br>( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) | 比热容/<br>( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) |
|--------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 铁      | 7 850                                      | 44.50                                                           | 475                                                             |
| 铜      | 8 960                                      | 400.00                                                          | 385                                                             |
| 玻璃     | 2 203                                      | 1.38                                                            | 703                                                             |
| Kapton | 1 420                                      | 0.12                                                            | 1 090                                                           |

为简化模型并降低计算资源需求,本文利用结构对称性,仅选取板叠结构中的单块平板及其对应两端换热器的一半区域作为计算域进行模拟。计算域的边界条件如图1(b)所示。其中封闭端为绝热壁面边界条件,上下为对称边界条件,开口端为压力出口边界条件,两端换热器简化为等温壁面。为了准确模拟板叠与周围流体之间的换热,板叠固体边界处定义为耦合换热边界条件,保证在流固交界面处流体和固体的温度以及热流密度保持一致

$$T_s = T_f; k_s \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{n}} = k_f \frac{\partial T_f}{\partial \mathbf{n}} \quad (1)$$

式中:  $k$  为导热系数;  $T$  为热力学温度;  $\mathbf{n}$  为壁面单位法向量; 下标  $s$  表示固体; 下标  $f$  表示流体。

### 1.3 数值模型

#### 1.3.1 流体域控制方程

为模拟热声热机的流体区域,本文求解了完整的可压缩 N-S (Navier-Stokes) 方程。为了便于表述,方程采用张量形式表示,下标  $i, j, m$  表示各分量的方向。方程的守恒形式如下

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

式中:  $t$  为时间;  $\mathbf{U}$  为守恒变量;  $\mathbf{V}$  为原始变量,表达式为

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u_i, \rho E]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{V} = [\rho, u_i, p]^T \quad (4)$$

其中,  $\rho$  为流体密度,  $u_i$  为速度分量,  $p$  为压力,  $E$  为总能量;  $\mathbf{F}$  为总通量,其组成形式为  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^c - \mathbf{F}_i^v$ ,  $\mathbf{F}_i^c$  和  $\mathbf{F}_i^v$  分别为对流通量以及黏性通量。 $\mathbf{F}_i^c$  和  $\mathbf{F}_i^v$  具体定义式如下

$$\mathbf{F}_i^c = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ u_i (\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_i^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ u_j \tau_{ji} - q_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中:  $\delta_{ij}$  为克罗内克算子;  $\tau_{ij}$  为黏性应力;  $q_i$  为黏性热通量。 $\tau_{ij}$ 、 $q_i$  定义式如下

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (7)$$

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (8)$$

式中:  $x_i, x_j, x_m$  为空间坐标各方向上的分量;  $\mu$  为随温度变化的动力黏性系数,  $\mu$  遵循如下所示的 Sutherland 幂函数公式

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S_u}{T + S_u} \quad (9)$$

式中:  $T_0$  为参考温度;  $\mu_0$  为参考动力黏性系数;  $S_u$  为 Sutherland 常数,对于空气而言,  $S_u$  取 111。

本文假设工作介质为性质恒定的理想气体,其满足以下状态方程

$$p = \rho R T \quad (10)$$

式中:  $R$  为气体常数。

总能量  $E$  可以通过理想气体状态方程和其他流体物性参数相关联

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \quad (11)$$

式中:  $\gamma$  为流体比热比。

#### 1.3.2 固体域控制方程

对于固体区域而言,内部的传热过程需要考虑,仅需要求解傅里叶导热方程

$$\frac{\partial (\rho_s c_{p,s} T_s)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (12)$$

式中:  $c_{p,s}$  为固体的比定压热容。

傅里叶导热方程属于纯抛物型方程,可与兼具双曲型与抛物型特性的完全可压缩 N-S 方程进行统一建模。

#### 1.3.3 间断伽辽金算法

由于式(7)和(8)中黏性应力与黏性热通量的表达式包含原始变量  $\mathbf{V}$  的一阶导数,在对相应通量取散度时不可避免地引入二阶导数项。然而,在 DG 方法所采用的不连续函数空间中,这类二阶导数项无法直接在弱变分框架下加以处理。为了解决这一问题,本文采用了 Bassi 和 Rebay<sup>[27]</sup> 提出的混合有限元格式来构建 N-S 方程中的黏性项。本文将原始变量的梯度设为一个辅助变量  $\mathbf{Q}$ ,从而得到 N-S 方程的一个辅助方程,使其被重新表述为以下耦合的一阶方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) = 0 \quad (13)$$

$$Q - \nabla V = 0 \quad (14)$$

为了求解上述控制方程,假设边界为  $\partial\Omega$  的物理域  $\Omega$  可以被计算域  $\Omega_h$  良好地逼近。根据实际网格划分,计算域由一组  $N_e$  个几何贴合且不重叠的单元  $D^{n_e}$  组成。每个有限元内的局部数值解  $w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t)$  由  $N_p$  阶多项式表示

$$w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_p=1}^{N_p} w_{n_p}^{n_e}(t) \phi_{n_p}(\mathbf{x}) = \sum_{n_p=1}^{N_p} w_h^{n_e}(x_{n_p}^{n_e}, t) l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

式中:  $\phi_{n_p}(\mathbf{x})$  为试函数空间下的试函数,选取拉格朗日多项式  $l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x})$ 。整个物理区域上的全局解  $w(\mathbf{x}, t)$  可以由全局数值解  $w_h(\mathbf{x}, t)$  来逼近,其中全局数值解由  $N_e$  个有限元内局部数值解  $w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t)$  的叠加,其表达式为

$$w(\mathbf{x}, t) \approx w_h(\mathbf{x}, t) = \bigoplus_{n_e=1}^{N_e} w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

假设每个有限元的局部解可以被局部多项式解  $w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t)$  和局部总通量  $\mathbf{F}_h^{n_e}$  表示,因此每个有限元上的局部残差  $\mathcal{R}_h(\mathbf{x}, t)$  可表示为

$$\mathbf{x} \in D^{n_e}: \mathcal{R}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_h^{n_e} \quad (17)$$

根据 DG 算法,当局部残差与测试函数空间内与所有测试函数  $\varphi_{n_p}(\mathbf{x})$  正交时,其在该有限元空间中的投影可被消除。采用 DG 形式时,测试函数与试函数选取同一函数空间,即拉格朗日多项式  $l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x})$ ,从而得到

$$\int_{D^{n_e}} \mathcal{R}_h(\mathbf{x}, t) l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (18)$$

将式(16)代入式(17),应用高斯定理可以得到以下方程

$$\int_{D^{n_e}} \left( \frac{\partial w_h^{n_e}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_h^{n_e} \cdot \nabla l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x}) \right) d\Omega = - \int_{\partial D^{n_e}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_h^{n_e*} l_{n_p}^{n_e}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{F}_h^{n_e*}$  为数值通量。由于 DG 方法允许解在单元间不连续,有限元交界面处不存在唯一的守恒变量取值,因此必须通过引入数值通量来连接相邻单元的解,从而保证数值格式的闭合性与稳定性。数值通量通常通过求解或近似求解界面黎曼问题得到,如 Godunov、局部 Lax-Friedrichs 及 Roe 通量等。本文采用局部 Lax-Friedrichs 数值通量,其在界面法向方向上的表达式为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_h^{n_e*} = \frac{\mathbf{F}_h^{n_e-} + \mathbf{F}_h^{n_e+}}{2} + \frac{C}{2} \mathbf{n} \cdot (w_h^{n_e-}(\mathbf{x}, t) - w_h^{n_e+}(\mathbf{x}, t)) \quad (20)$$

式中:上标“-”和“+”分别表示来自有限元界面内

侧和外侧的物理量,这是由于在每个单元界面上需要同时考虑相邻单元两侧的信息; $C$  表示界面法向上通量雅可比矩阵的局部最大特征值,可视为线性化声波传播速度的近似上界<sup>[28]</sup>,其表达式为

$$C = \max_{\xi \in [w_h^-, w_h^+]} \left( \sqrt{u_i(\xi) u_i(\xi)} + \sqrt{\frac{\gamma p(\xi)}{\rho(\xi)}} \right) \quad (21)$$

式中:  $\xi$  为有限元交界面两侧的中间状态变量。

#### 1.3.4 时间积分格式

在将 N-S 方程转换为一阶系统后,其左侧包含时间导数项,需采用合适的时间积分格式进行离散。为此,本文采用强稳定性 Runge-Kutta(SSP-RK)格式。该类方法能够在保持数值稳定性的前提下允许更大的时间步长,提升计算效率。参考文献[29],三阶三步的 SSP-RK 格式可表示为

$$\begin{cases} w_h^{(1)} = w_h^n + \Delta t \mathcal{L}_h(w_h^n, t^n) \\ w_h^{(2)} = (3w_h^n + w_h^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}_h(w_h^{(1)}, t^n + \Delta t))/4 \\ w_h^{n+1} = w_h^{(3)} = (w_h^n + 2w_h^{(2)} + 2\Delta t \mathcal{L}_h(w_h^{(2)}, t^n + 0.5\Delta t))/3 \end{cases} \quad (22)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长;  $\mathcal{L}_h$  为数值解在时间步长内的变化量;上标(1)、(2)、(3)分别表示单个时间步长的各个中间阶段解;上标  $n$  表示第  $n$  个时间步。

通过采用 DG 方法并结合合适的时间积分格式,对完整的可压缩 N-S 方程在空间和时间上进行离散,原本的非线性偏微分方程组被转化为一组可求解的线性方程组。基于上述数值方法,整个仿真代码基于 MFEM 构建。

#### 1.4 网格无关性及模型验证

图 2 展示了热声热机部分计算网格。整个计算网格是通过 Gmsh 软件生成的,该软件是一款开源的三维有限元网格生成器,集成了内置的 CAD 引擎与后处理功能<sup>[30]</sup>。本研究中采用 Gmsh2.2 版本的 ASCII 二进制格式生成二维网格文件,该格式与所使用的 MFEM 数值计算库兼容。

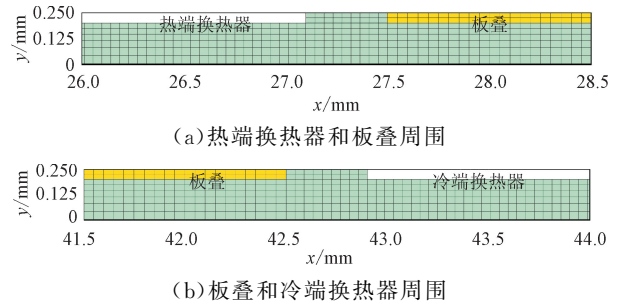


图 2 热声热机计算网格局部示意图

Fig. 2 Partial schematic diagram of the computational mesh of the thermoacoustic engine

为减少数值模拟误差,本研究采用了结构化四边形网格。与有限体积法和有限差分法不同,DG方法的收敛性可以通过减小网格尺寸、提高有限元阶数或两者结合(即hp收敛)来实现<sup>[28]</sup>。为验证计算结果的网格无关性,本文分别采用包含15 252个和26 296个单元的两种网格,并在每种网格下改变有限元阶数,共构建了4组不同的计算组合,以确定最优的网格数量和有限元阶数。在验证的算例中,板叠材料为铁。

图3展示了热声热机达到稳态时,4组计算组合在压力反节点位置处的压力振幅曲线。结果表明,除15 252网格与一阶有限元的组合外,其余3组结果相差不大,说明在此基础上进一步减小网格尺寸或提高有限元阶数对模拟精度影响不大。由于计算资源有限,本文未开展更高网格密度及更高阶数的模拟计算。综合计算效率与结果精度,确定最优组合为15 252网格配合二阶有限元,其压力振幅与26 296网格数量和二阶有限元的结果相比,仅相差0.13%。

在本文模拟中,若CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)数超过0.3,求解过程将会发散。为了平衡数值稳定性与计算效率,最终将CFL数设定为0.2,时间步长约为 $10^{-8}$  s。

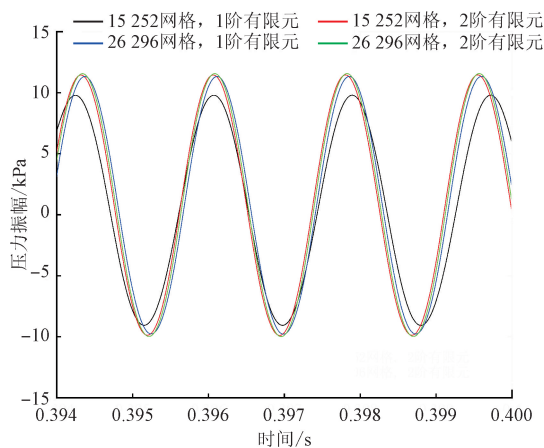


图3 网格数量和有限元阶数无关性验证

Fig. 3 Solution dependency on mesh sizes and finite element orders

为验证数值模型的准确性,将本文结果与文献[26]的数值模拟结果进行了对比。图4展示了板叠材料为铁时压力反节点处压力振荡的时间演化过程。在相同工况下,与文献[26]的结果相比,本文模拟结果在初始阶段的压力振幅的增长速率更快。当热声热机达到平衡状态时,压力振幅稳定在约11.54 kPa,该结果与文献[26]计算得到的10.4 kPa

压力振幅相差不大。图5给出了图4中压力振幅达到稳态时的功率谱密度估计结果。结果显示,热声热机的压力振幅主频为569 Hz,略高于文献[26]中的534.1 Hz;同时,3次谐波强度相较主频低38.48 dB,该衰减与文献[7]中实验测得的30 dB基本一致,验证了本文数值模拟模型的可靠性。

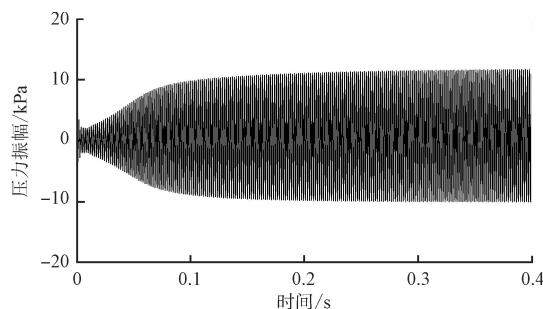


图4 板叠材料为铁时压力反节点处自激压力振荡演化过程

Fig. 4 Self-excited pressure oscillation evolution at the pressure antinode for an iron stack

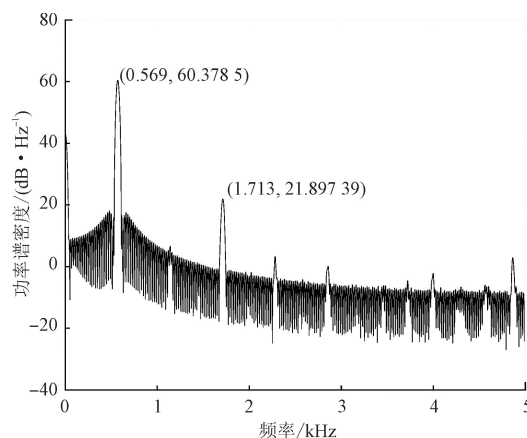


图5 板叠材料为铁时压力振幅的功率谱密度估计

Fig. 5 Power spectral density estimate of pressure fluctuations for an iron stack

## 2 结果与讨论

### 2.1 不同板叠材料下热声热机模拟结果对比

不同板叠材料的导热系数和比热容存在差异,从而影响热声热机中的能量转换效率。图6展示了在不同板叠材料条件下,热声热机在一个工作周期内产生的压力振幅曲线。结果表明,当板叠材料为铁时,压力振幅最高,约为11.54 kPa;其次为玻璃,达到11.29 kPa,与铁材料相近;Kapton的压力振幅略低,为11.31 kPa;而铜材料的压力振幅最低,仅为10.21 kPa。

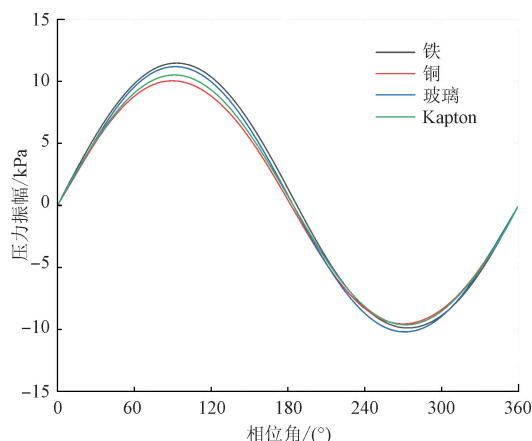


图 6 不同板叠材料热声热机压力振幅对比

Fig. 6 Comparison of pressure amplitudes in thermoacoustic engines under different stack materials

图 7 展示了不同板叠材料下热声热机稳态时沿板叠长度方向的温度分布。结果表明,各材料中板叠温度升高主要集中在靠近热端换热器一侧。其中铁板叠的温度分布最接近线性,且由于其导热系数较高,板叠右端仍存在一定的温度提升。玻璃和 Kapton 板叠的温度分布特征较为类似,在板叠左侧有着较大的温度梯度,而在中心右侧温度梯度迅速衰减,直到板叠右端温升趋近于 0。这是由于,这两种材料有着较高的比热容以及较低的导热系数,使得温升主要集中在板叠左侧区域。相比之下,铜板叠的温度分布几乎呈水平直线,仅在靠近热端换热器处出现约 25 K 的温升。这是由于,铜具有相对最高的导热系数和较低的比热容,使其在工作介质往复振荡的能量交换过程中难以储存能量,从而无法在长度方向上形成显著的温度梯度。综上,不同材料的板叠在温度分布及梯度特征上存在明显差异,这可能导致工作介质在不同位置的声能分布发生变化。

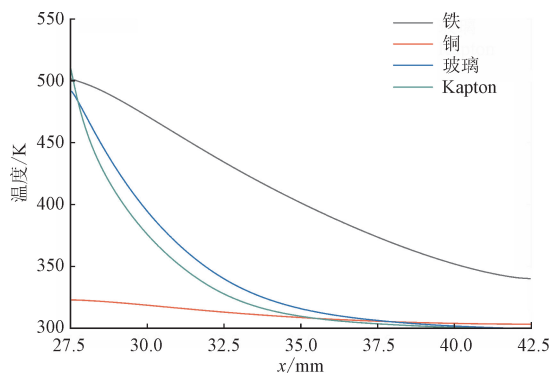
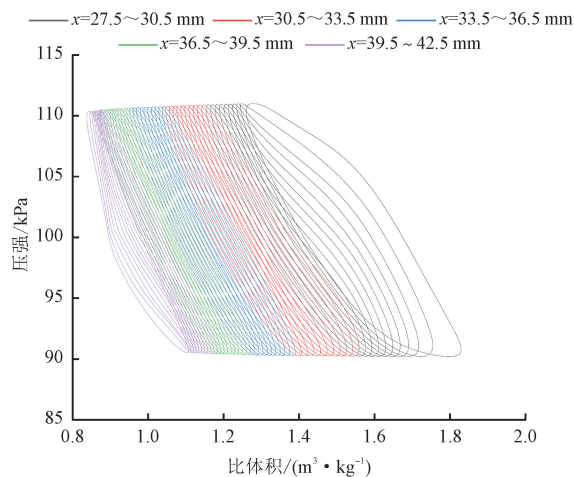


图 7 不同板叠材料板叠长度方向温度分布

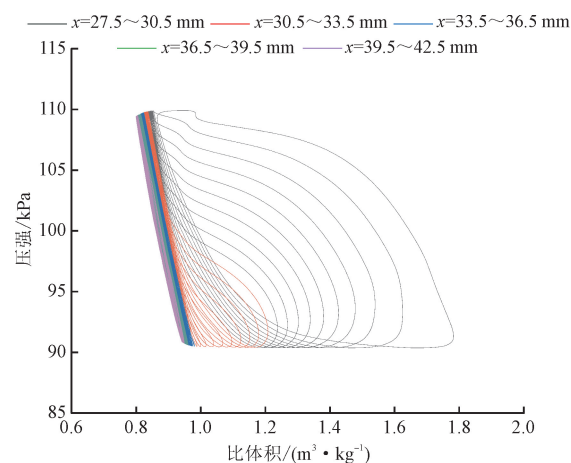
Fig. 7 Axial temperature distribution in the stack under different stack materials

## 2.2 欧拉观点下热声热机能量转换过程分析

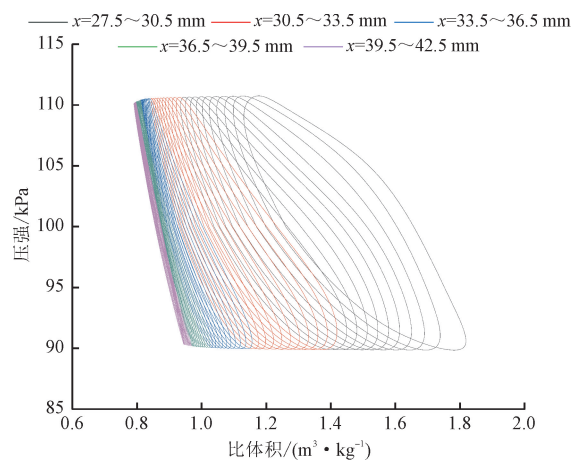
为展示不同材料下板叠周围工作介质的做功分布,本文在距离板叠壁面 0.1 mm 处选取了 50 个等间距采样点,并在欧拉观点下记录了一个周期内通过这些位置的气体微团的压强随比体积的变化关系 ( $p-v$  图),如图 8 所示。



(a) 铁



(b) 铜



(c) 玻璃

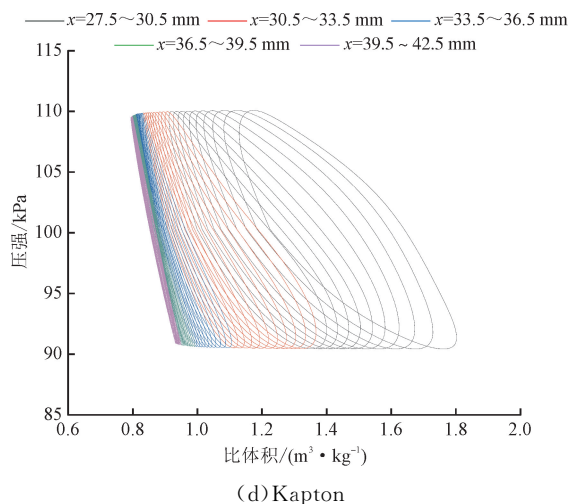


图 8 板叠壁面 0.1 mm 处 50 个等间距点压强-比体积关系 (欧拉观点)

Fig. 8 Pressure variations with specific volume at 50 equally spaced points 0.1 mm from the stack wall (Eulerian viewpoint)

由图可见,曲线所围成的面积从热端换热器侧向冷端换热器侧逐渐减小,而该面积可视为单位质量的工作介质在一个周期内于对应位置对外界所做的功。对于铁板叠而言,曲线所围面积沿板叠长度方向的衰减较为平缓,即使在靠近冷端换热器一侧仍保持一定大小。而对于铜板叠,热端附近的曲线面积较大,但从左至右迅速减小,到最右侧几乎收敛为一条直线。玻璃和 Kapton 板叠的曲线面积分布规律相似,曲线所围成的面积从左往右不断减小,但衰减速率相比于铜板叠更为平缓,同样在靠近冷端换热器一侧曲线所围成的面积趋近于 0。总体来看,曲线面积的分布与沿板叠长度方向上的温度分布密切相关,基本与温度梯度的大小成正比,表明板叠与工作介质的能量交换影响着工作介质的做功分布,从而影响着热声热机的工作性能。

为更直观地展示一个周期内板叠及换热器周围工作介质的做功分布,对图 8 中的压强-比体积曲线进行了积分计算其围成的面积。该面积表示单位质量(1 kg)工作介质在一个周期内经过对应位置时对整个热声系统所做的功。本文将该物理量定义为局部能量密度<sup>[31]</sup>。图 9 展示了不同板叠材料下,板叠及两端换热器周围气体的局部能量分布云图。结果表明,对于所有材料,局部能量密度的最大值均集中在热端换热器与板叠之间的间隙处,且随着远离壁面,局部能量密度呈逐渐增大的趋势。对于铁板叠(见图 9(a)),局部能量密度的峰值约为 4 660 J/kg,且在整个板叠周围仍保持一定大小的分布。从中可

以观察到,靠近板叠边界层的局部能量密度等高线呈上倾趋势,表明在远离热端换热器的一侧,壁面附近声流驱动力逐渐减弱,边界层效应增强,使工作介质需在更远离壁面的位置才能产生有效做功。对于铜板叠(见图 9(b)),局部能量密度峰值约为 10 450 J/kg。尽管其峰值远高于铁板叠,但能量主要集中在热端换热器与板叠之间的间隙区域,远离热端换热器的区域能量密度迅速衰减至 0。玻璃和 Kapton 板叠的局部能量密度分布与此类似,主要集中在热端换热器及板叠左侧区域,这一分布特征与两种材料的温度分布趋势相一致。

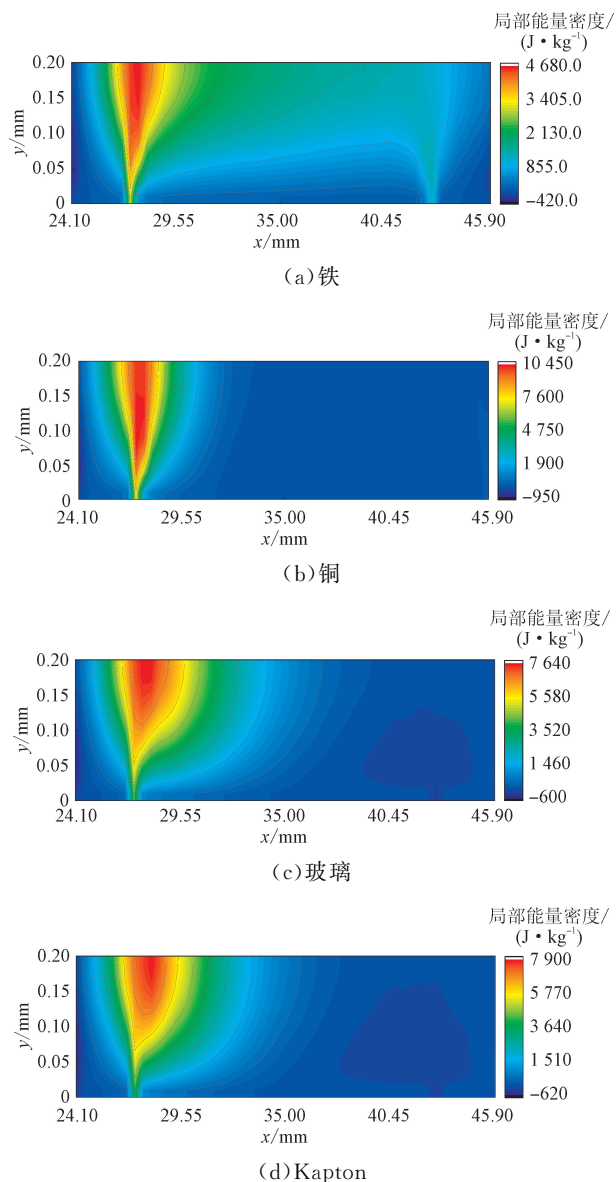
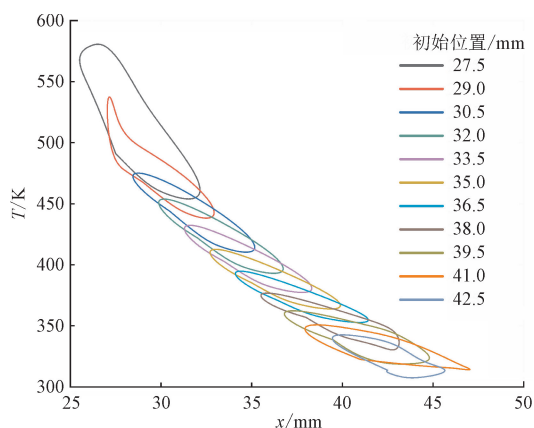


图 9 不同板叠材料两端换热器以及板叠周围局部能量密度分布

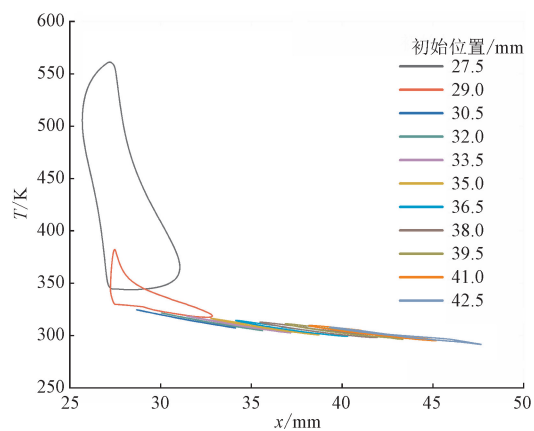
Fig. 9 Local energy density distribution contours around the stack and both heat exchangers for different stack materials

### 2.3 拉格朗日观点下热声热机能量转换过程分析

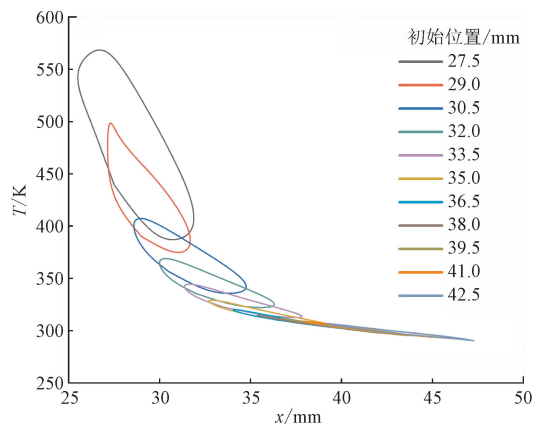
在拉格朗日观点下,选取了距离板叠壁面 0.1 mm 处的 11 个等间距点的粒子(取自周期初始时刻),并追踪了这些粒子一个周期内的状态变化。不同板叠材料下,距离板叠壁面 0.1 mm 处的 11 个等间距粒子在一个周期内的瞬时温度随位置的变化关系( $T$ - $x$  曲线)见图 10。从图 10 可以看出,所有粒子的  $T$ - $x$  曲线均呈椭圆形,但从左向右椭圆形状逐渐由竖直变得扁平。这表明,靠近热端换热器一侧的粒子在一个周期内经历较大的温度变化,但往



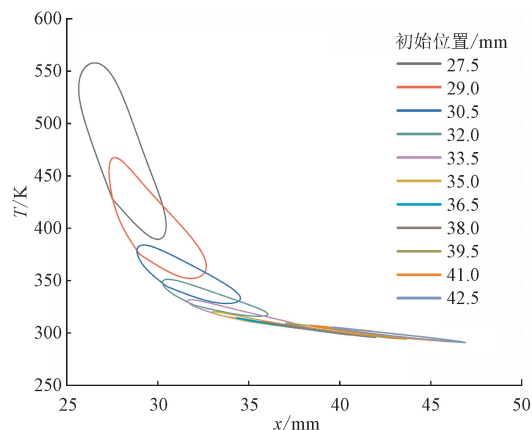
(a) 铁



(b) 铜



(c) 玻璃



(d) Kapton

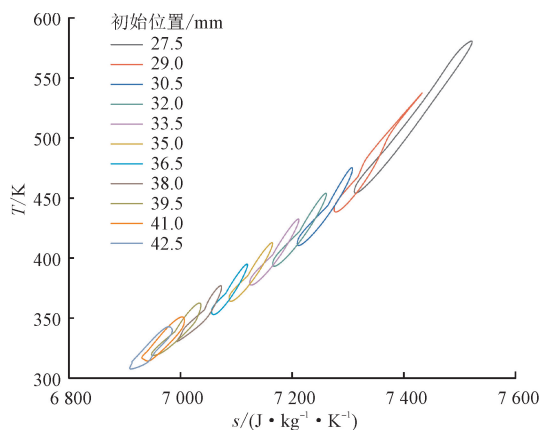
图 10 板叠壁面 0.1 mm 处的 11 个等间距点处粒子周期内瞬时温度-位置关系(拉格朗日观点)

Fig. 10 Instantaneous temperature-position relation of particles at 11 equally spaced points 0.1 mm from stack wall (Lagrangian viewpoint)

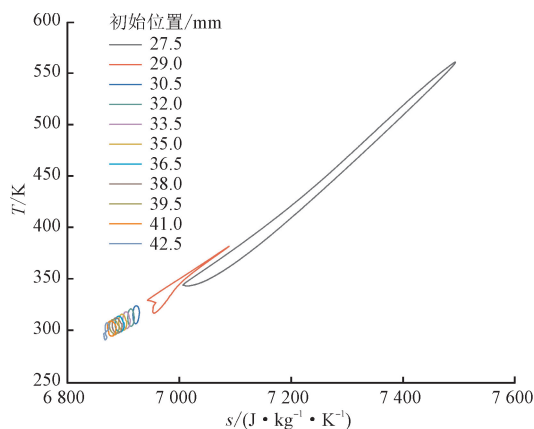
复振荡位移较小。随着粒子初始位置沿板叠从左向右移动,其在往复振荡过程中经过相同位置时的最大温差逐渐减小,到靠近冷端换热器一侧的粒子则经历较小的温度变化,但振荡位移更大。对于铁板叠,不同初始位置的粒子在往复振荡经过同一位置时的温差最大值从左向右下降较为缓慢。相比之下,铜板叠中粒子的  $T$ - $x$  曲线差异显著:在  $x=27.5$  mm (板叠最左端)位置,粒子周期内经过相同位置的最大温差约为 217 K,而往复振荡最大位移仅约 5 mm;在  $x=29$  mm 位置,最大温差迅速下降至约 51.16 K,往复振荡位移略增至约 5.6 mm。进一步向右,粒子最大温差几乎为 0,而振荡位移增大至约 8.3 mm,在  $T$ - $x$  图上几乎呈直线。同样,由于玻璃和 Kapton 具有相似的物理性质,不同位置粒子的  $T$ - $x$  曲线也表现出相似规律。在板叠中心( $x=35$  mm)左侧,粒子的  $T$ - $x$  曲线仍呈椭圆形;而在中心右侧,由于温度梯度接近于 0,曲线逐渐趋于直线。

上述分析展示了粒子微团在一个周期内温度随位置的变化过程。为进一步揭示不同位置粒子在一个周期内对系统的做功特性,本文还记录了粒子温度随比焓变化的关系( $T$ - $s$  图),如图 11 所示。与  $p$ - $v$  图类似, $T$ - $s$  图中椭圆曲线所围成的面积(即曲线的环路积分)代表粒子在一个循环内对周围环境所做的净功。在  $T$ - $x$  图中趋近于直线的粒子,其  $T$ - $s$  曲线围成的面积较小,甚至出现曲线交叉,表明这些粒子在一个循环内对系统所做的净功为负。与在欧拉观点下所计算的局部能量密度分布相似,对于铁

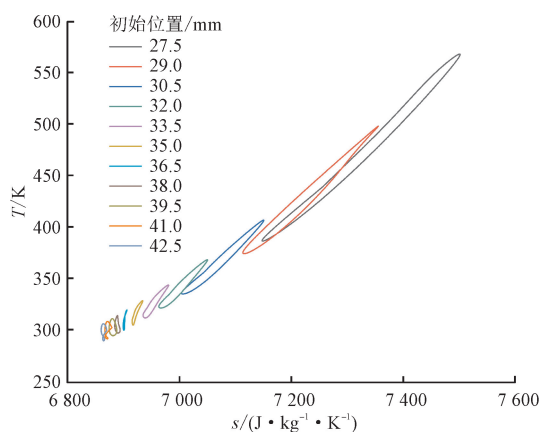
板叠,不同位置的粒子一个周期内对周围环境做功分布较为均匀,从热端向冷端逐渐减小。对于铜板叠而言,做功主要由周期初始时位于最左端的粒子提供,随后向右迅速下降,直至接近0甚至负值。对于玻璃和Kapton板叠,位于板叠中心( $x=35\text{ mm}$ )左侧的粒子,其做功从左向右逐渐减小,而在中心右侧则进一步下降至0或负值。可见在拉格朗日观点下,不同初始位置粒子的做功分布与板叠上的温度分布规律呈现出相似的趋势。



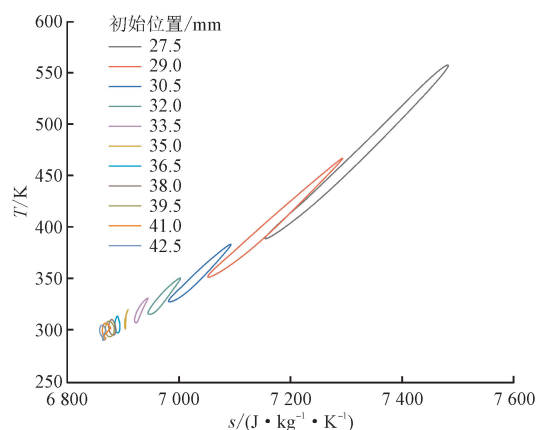
(a) 铁



(b) 铜



(c) 玻璃



(d) Kapton

图 11 板叠壁面 0.1 mm 处的 11 个等间距点处粒子周期内瞬时温度-比熵关系(拉格朗日观点)

Fig. 11 Instantaneous temperature-specific entropy relation of particles at 11 equally spaced points 0.1 mm from stack wall (Lagrangian viewpoint)

## 2.4 不同板叠材料下热声热机效率对比

通过在欧拉和拉格朗日两种不同观点下对热声热机的能量转换过程进行分析,本文获得了一个循环内各位置处的能量密度分布,以及循环初始时刻不同位置粒子在一个周期内的做功分布。根据 Swift 的理论,板叠中所有气体微团在一个周期内所做功的总和,即为热声热机产生的总功<sup>[32]</sup>。由于该功对应于驻波声频下的能量转换,故称为声功。在欧拉坐标系下,对各位置的局部能量密度进行积分,同样可以计算出热声热机在一个周期内产生的声功。基于此方法,可以得到单位厚度的热声热机在一个周期内的输出功,其计算公式如下

$$W_{\text{cycle}} = \int_V (\bar{\rho}(\mathbf{x}) \oint p(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}, t)) dV \quad (23)$$

式中:  $W_{\text{cycle}}$  为单位厚度热声热机一个周期的输出功;  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  为不同位置空气一个周期的平均密度。

整个热声热机系统的输入为单位厚度两端换热器在一个周期内的换热量  $Q_{\text{cycle}}$ , 用来维持板叠两端的温度梯度, 计算公式如下

$$Q_{\text{cycle}} = \int_0^{t_p} \int_{x_1}^{x_2} \dot{Q}_L(x, t) dx dt \quad (24)$$

式中:  $\dot{Q}_L$  为换热器局部瞬态换热功率;  $t_p$  为一个周期的时长;  $x_1, x_2$  为  $x$  轴积分上、下限。

在得到了整个系统的输入、输出之后, 热声热机效率  $\eta$  就能计算出来, 用来评估不同板叠材料对热声热机性能的影响

$$\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{cycle}}} \quad (25)$$

表 4 对比了不同板叠材料条件下热声热机在单个工作循环中的做功、两端换热器的换热量及对应

效率。结果表明,玻璃板叠下的循环做功最大,其次为铁板叠,Kapton 板叠略低,而铜板叠的做功最小。在单个循环的换热量方面,铜板叠所需换热量最高,其次依次为 Kapton 和玻璃,铁板叠的换热量最低。整体效率而言,铁板叠下热声热机的最高,可达 10.11%,铜板叠最低,仅为 3.87%。由此可见,板叠材料物理特性所导致的温度梯度差异对热声热机的能量转换性能具有显著影响。

表 4 不同板叠材料下热声热机效率对比

Table 4 Comparison of the efficiency of thermoacoustic engines with different stack materials

| 材料     | 循环做功/<br>( $\text{J} \cdot \text{m}^{-1}$ ) | 循环换热/<br>( $\text{J} \cdot \text{m}^{-1}$ ) | 效率/%  |
|--------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-------|
| 铁      | 0.004 574                                   | 0.045 23                                    | 10.11 |
| 铜      | 0.003 972                                   | 0.102 70                                    | 3.87  |
| 玻璃     | 0.004 878                                   | 0.065 03                                    | 7.50  |
| Kapton | 0.004 477                                   | 0.065 87                                    | 6.80  |

### 3 结 论

本研究基于开源 C++ 数值计算库 MFEM,开发了采用间断伽辽金方法的高精度热声热机数值模拟模型。通过数值模拟,系统研究了不同板叠材料条件下热声热机的运行特性,并分别从欧拉和拉格朗日观点分析了能量转换过程,进一步对比了不同板叠材料下热声热机的效率。本文得到主要结论如下。

(1)当板叠材料为铁时,热声热机产生的压力振幅最高,玻璃和 Kapton 次之,铜板叠最低。不同材料沿板叠长度方向的温度梯度表现出显著差异:铁板叠的温度梯度较为均匀,铜板叠的温度分布趋近于水平直线,而玻璃与 Kapton 板叠的温度梯度主要集中在靠近热端换热器的一侧。

(2)在欧拉观点下,通过计算一个周期内压力-比体积曲线面积得到了局部能量密度分布。结果表明,该分布与板叠的温度分布具有相似性:铁材板叠的局部能量密度峰值最低,但分布较为均匀;玻璃和 Kapton 板叠的能量密度主要集中在靠近热端换热器一侧;而铜板叠的局部能量密度峰值最高,但主要分布在热端换热器与板叠之间的间隙区域。

(3)在拉格朗日视角下,对不同板叠材料中气体粒子的振荡过程进行了分析。粒子温度-位置曲线表明,粒子的振荡距离从热端到冷端逐渐增加,而相应的温度变化幅度逐渐减小。板叠材料的物性参数会影响粒子振荡过程中的温度变化,其变化规律与板叠温度分布一致。粒子温度-比熵曲线揭示了粒子在一个振荡周期内对周围环境所做的功,其空间

分布规律同样与板叠的温度分布相似。

(4)计算了不同板叠材料在一个周期内的声功、换热量及热声热机效率。结果显示,板叠材料对性能影响显著:玻璃板叠的循环做功最大,铜板叠最小;铜材板叠的换热量最高,铁材最低;铁板叠的效率最高(10.11%),而铜材最低(3.87%)。这些差异表明,板叠材料的物性及其形成的温度梯度分布对热声热机性能具有重要影响。

### 参考文献:

- [1] Adeff J A, Hofler T J. Design and construction of a solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2000, 107(6): L37-L42.
- [2] Shen Chao, He Yaling, Li Yuguang, et al. Performance of solar powered thermoacoustic engine at different tilted angles [J]. Applied Thermal Engineering, 2009, 29(13): 2745-2756.
- [3] Wu Zhanghua, Dai Wei, Man Man, et al. A solar-powered traveling-wave thermoacoustic electricity generator [J]. Solar Energy, 2012, 86(9): 2376-2382.
- [4] Wang Kai, Dubey S, Choo F H, et al. Thermoacoustic Stirling power generation from LNG cold energy and low-temperature waste heat [J]. Energy, 2017, 127: 280-290.
- [5] Xu Jingyuan, Luo Ercang, Hochgreb S. A thermoacoustic combined cooling, heating, and power (CCHP) system for waste heat and LNG cold energy recovery [J]. Energy, 2021, 227: 120341.
- [6] Rott N. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes [J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 1969, 20(2): 230-243.
- [7] Swift G W. Thermoacoustic engines [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1988, 84(4): 1145-1180.
- [8] Swift G W. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1992, 92(3): 1551-1563.
- [9] Boroujerdi A A, Ziabasharhagh M. Analytical determination of oscillating frequencies and onset temperatures of standing wave thermoacoustic heat engines [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016, 98: 401-414.
- [10] Chen Geng, Tang Lihua, Mace B R. Theoretical and experimental investigation of the dynamic behaviour of a standing-wave thermoacoustic engine with various boundary conditions [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 123: 367-381.

- [11] Swift G W, Garrett S L. Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2003, 113(5): 2379-2381.
- [12] Hamilton M F, Ilinskii Y A, Zabolotskaya E A. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 111(5): 2076-2086.
- [13] Karpov S, Prosperetti A. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic movers: II nonlinear oscillations [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 112(4): 1434-1444.
- [14] Han Wei, Liu Jiping, Chong Daotong, et al. One-dimensional numerical simulation of thermoacoustic engine with flux-corrected transport algorithm [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2012, 39(5): 598-602.
- [15] Nowak I, Rulik S, Wróblewski W, et al. Analytical and numerical approach in the simple modelling of thermoacoustic engines [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, 77: 369-376.
- [16] Slimene S, Yahya A, Dhahri H, et al. Simulating Rayleigh streaming and heat transfer in a standing-wave thermoacoustic engine via a thermal lattice Boltzmann method [J]. International Journal of Thermophysics, 2022, 43(7): 100.
- [17] Ja'fari M, Jaworski A J. On the nonlinear behaviour of oscillatory flow in a high pressure amplitude standing-wave thermoacoustic heat engine [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2023, 201(Part 2): 123595.
- [18] 王海涛, 罗靖, 张丽敏, 等. 热声发动机中的交变流动换热器特性研究 [J]. 西安交通大学学报, 2023, 57(5): 97-108.  
Wang Haitao, Luo Jing, Zhang Limin, et al. Characterization of oscillating flow heat exchanger of the thermoacoustic engine [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2023, 57(5): 97-108.
- [19] 刘贤贤, 陈燕燕, 胡剑英, 等. 热声发动机整机核心部件模拟研究 [J]. 工程热物理学报, 2025, 46(3): 945-953.  
Liu Xianxian, Chen Yanyan, Hu Jianying, et al. Numerical research on the core component of thermoacoustic heat engine [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2025, 46(3): 945-953.
- [20] Besnoin E, Knio O M. Numerical study of thermoacoustic heat exchangers [J]. Acta Acustica United with Acustica, 2004, 90(3): 432-444.
- [21] Hariharan N M, Sivashanmugam P, Kasthuriangan S. Influence of operational and geometrical parameters on the performance of twin thermoacoustic prime mover [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, 64: 1183-1188.
- [22] Rahpeima R, Ebrahimi R. Numerical investigation of the effect of stack geometrical parameters and thermophysical properties on performance of a standing wave thermoacoustic refrigerator [J]. Applied Thermal Engineering, 2019, 149: 1203-1214.
- [23] Bouramdane Z, Bah A, Alaoui M, et al. Numerical analysis of thermoacoustically driven thermoacoustic refrigerator with a stack of parallel plates having corrugated surfaces [J]. International Journal of Air-Conditioning and Refrigeration, 2022, 30(1): 1.
- [24] Bouramdane Z, Bah A, Alaoui M, et al. Design optimization and CFD analysis of the dynamic behavior of a standing wave thermoacoustic engine with various geometry parameters and boundary conditions [J]. International Journal of Air-Conditioning and Refrigeration, 2023, 31(1): 1.
- [25] Anderson R, Andrej J, Barker A, et al. MFEM: a modular finite element methods library [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2021, 81: 42-74.
- [26] Ja'fari M, Jaworski A J, Piccolo A, et al. Numerical study of transient characteristics of a standing-wave thermoacoustic heat engine [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2022, 186: 122530.
- [27] Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(2): 267-279.
- [28] HESTHAVEN J S, Warburton T. Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications [M]. New York, USA: Springer, 2008.
- [29] GOTTlieb S, Shu Chiwang, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods [J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 89-112.
- [30] GEUZAIN C, REMACLE J F. Gmsh: a 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(11): 1309-1331.
- [31] YAO Chen, ZHOU Yao, LIU Jiping, et al. Numerical simulation investigating the influence of varied stack parameters on the energy conversion in thermoacoustic engines [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2025, 236(Part 2): 126305.
- [32] SWIFT G W. Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators [M]. 2nd ed. Cham, Germany: Springer International Publishing, 2017.

(编辑 杜秀杰)